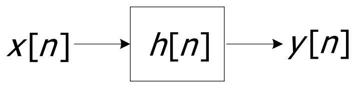
فصل دوم

سيستم‌هاي LTI زمان پيوسته و زمان گسسته

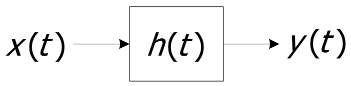
۲-۱- خواص سیستم‌هاي LTI با توجه به رابطه کانولوشن

زمان گسسته



$$x[n]=\delta[n]\Rightarrow y[n]=h[n]$$

زمان پیوسته



$$x(t)=\delta(t)\Rightarrow y(t)=h(t)$$

۲-۱-۱- جابه‌جایي‌پذيري

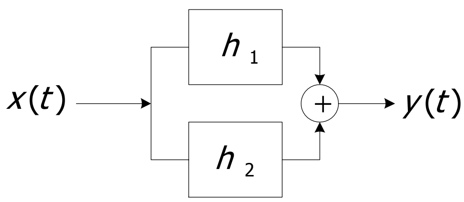
$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,h[n-k]$$
$$=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\,x[n-k]$$

,

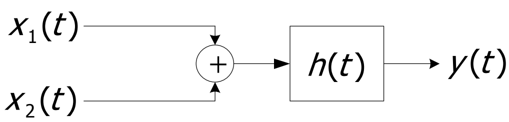
$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda$$
$$=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)\,x(t-\lambda)\,d\lambda$$

۲-۱-۲- توزیع‌پذيري

$$y(t)=x(t)*(h_1(t)+h_2(t))=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

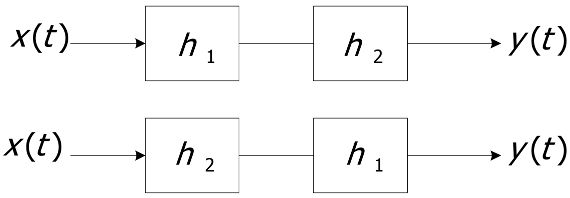


$$y(t)=(x_1(t)+x_2(t))*h(t)=x_1(t)*h(t)+x_2(t)*h(t)$$



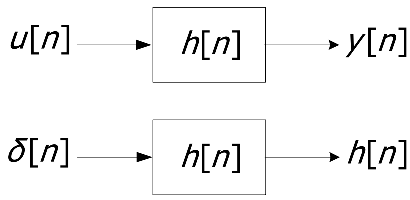
۲-۱-۳- شرکت‌پذيري

$$y(t)=x(t)*(h_1(t)*h_2(t))$$
$$=x(t)*(h_2(t)*h_1(t))$$

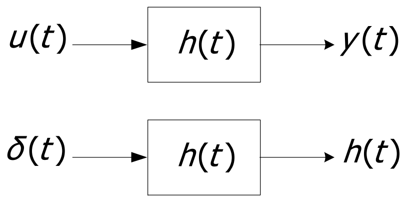


۲-۲- رابطه بین پاسخ ضربه h(t) و پاسخ پله

زمان گسسته



زمان پیوسته



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$$h[n] = y[n] - y[n-1]$$

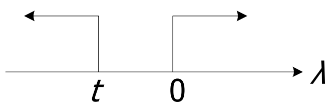
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)\, d\lambda$$

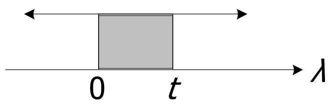
$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

مثال ۱) پاسخ پله سیستمهای LTI زیر را بدست آورید.

الف) $h(t) = \frac{1}{RC} e^{\frac{-t}{RC}} u(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC} e^{\frac{-\lambda}{RC}} u(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} 0 & , \quad t<0 \quad ; \\ \int_{0}^{t} \frac{1}{RC} e^{\frac{-\lambda}{RC}} d\lambda = 1 - e^{\frac{-t}{RC}} & , \quad t \ge 0 \quad ; \end{cases}$$





$$y(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) u(t)$$

ب) $h[n] = (-a)^n u[n]$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}(-a)^k u[k]=\begin{cases}0 & , \quad n<0\\ \sum_{k=0}^{n}(-a)^k=\dfrac{1-(-a)^{n+1}}{1-(-a)} & , \quad n\geq 0\end{cases}=\frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}u[n]$$

۲-۳- خواص سیستم‌هاي LTI با توجه به تابع تبديل

۲-۳-۱- حافظه

زمان گسسته

$$x[n]\longrightarrow\boxed{h[n]}\longrightarrow y[n]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\,x[n-k]$$

شرط بدون حافظه بودن سيستم:

$$h[n]=0 \quad ; n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

زمان پيوسته

$$x(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow y(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)\,x(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$h(t)=0 \quad ; t\neq 0$$

اثبات (سيستم زمان گسسته):

$$y[n]=\ldots+h[-1]x[n+1]+h[0]x[n]+h[1]x[n-1]+\ldots$$

اين سيستم به شرطي بدون حافظه است كه خروجي در هر لحظه به ورودي در همان لحظه وابسته باشد كه براي اين منظور بايستي:

$$h[n]=0 \quad , \quad n\neq 0 \quad \Rightarrow h[n]=\delta[n] \quad \text{يا} \quad h[n]=k\,\delta[n] \quad ; \quad k=cte$$

۲-۳-۲- معكوس پذيري

زمان پيوسته

$$x(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow\boxed{h_I(t)}\longrightarrow y(t)=x(t)$$

$$x(t)=(h(t)*h_I(t))*x(t)$$

$$\delta(t) * x(t) = x(t) \Rightarrow \quad h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \boxed{h_I[n]} \longrightarrow y[n] = x[n]$$

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n]$$

۲-۳-۳- علیت

در سیستم علي خروجي به آينده ورودي بستگي ندارد. با توجه به رابطه $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$ شرط زير براي تابع تبديل (پاسخ ضربه) بيانگر سيستم علي خواهد بود.

زمان گسسته

$$h[n] = 0 \quad ; \quad n < 0$$

زمان پيوسته

$$h(t) = 0 \quad ; \quad t < 0$$

تذکر: تابع تبديل $h(t) = u(t)$ ($h[n] = u[n]$) بيانگر سيستم علي است.

۲-۳-۴- پايداري (BIBO*)

زمان پيوسته

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| |x(t-\lambda)|\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|\, d\lambda < \infty$$

شرط پايداري: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

---

* Bounded Input Bounded Output

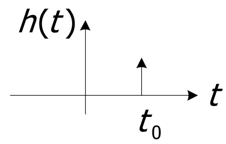
$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

شرط پايداري: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

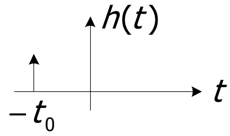
مثال ٢) با استفاده از تابع تبديل خواص سيستم‌هاي LTI را بررسي كنيد.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t-t_0)$$

الف) علي بودن



$$h(t) = y(t)\big|_{x(t)=\delta(t)} \Rightarrow h(t) = \delta(t-t_0) = \begin{cases} t_0 \geq 0\,; & \text{سيستم علي} \\ t_0 < 0\,; & \text{سيستم غير علي} \end{cases}$$



ب) سيستم معكوس

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t) \quad , \quad \delta(t-t_0) * h_I(t) = \delta(t) \quad , \quad h_I(t-t_0) = \delta(t) \xrightarrow{t-t_0=t'} h_I(t') = \delta(t'+t_0)$$

معكوس‌پذير

ج) پايداري

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t-t_0)|\, dt < \infty \quad \text{پايدار}$$

مثال ٣)

١الف) $h(t) = e^{at}\, u(t)$

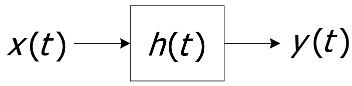
علي و حافظه‌دار ,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{at}\, u(t)|\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{at}\, dt = \begin{cases} a < 0 & \text{پايدار} \\ a \geq 0 & \text{ناپايدار} \end{cases}$$

٢ب) $h[n] = a^n\, u[n+2] \qquad n \geq -2\,,$

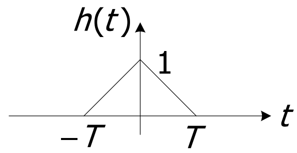
غيرعلي و حافظه‌دار

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k\, u[k+2]| = \sum_{k=-2}^{\infty} |a^k| \Rightarrow \begin{cases} |a| < 1 & , \quad \text{پايدار} \\ |a| > 1 & , \quad \text{ناپايدار} \end{cases}$$

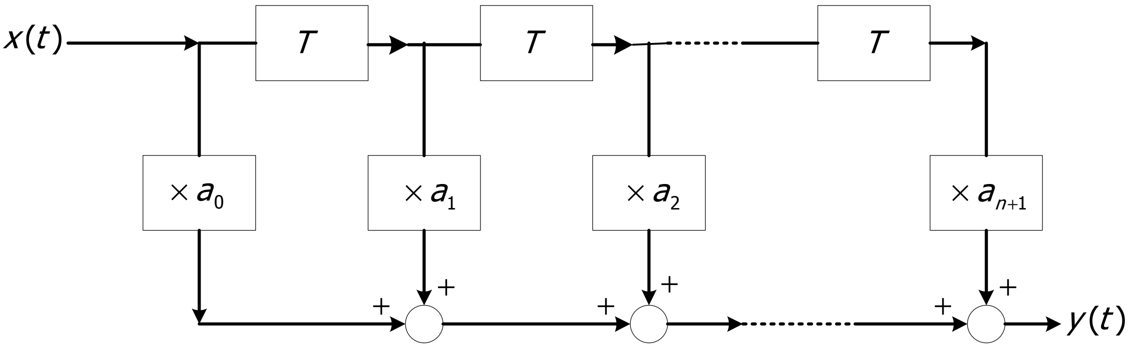
تمرين١: مطلوب است ترسيم y(t) ؟



$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2kT)$$

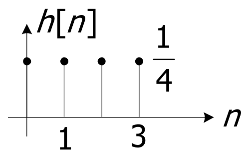


تمرین ۲: مطلوب است پاسخ ضربه سیستم ذیل h(t)=?



مثال ۳) رابطه بین ورودي دلخواه x[n] و خروجي y[n] را براي پاسخ ضربه سیستم LTI داده شده بدست آورید.

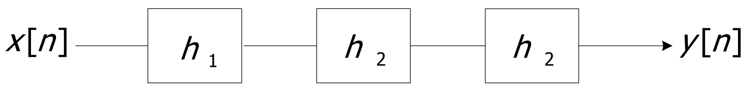
$$h[n]=\begin{cases}\frac{1}{4} & , \quad 0\le n\le 3\\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

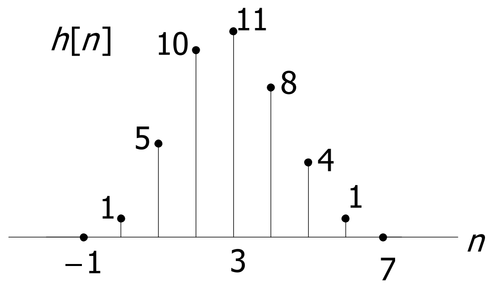


$$h[n]=\frac{1}{4}(u[n]-u[n-4])=\frac{1}{4}(\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3])$$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\frac{1}{4}(x[n]+x[n-1]+x[n-2]+x[n-3])$$

مثال ۴) اگر $h_2[n]=u[n]-u[n-2]$ الف) مقدار $h_1[n]$ را بدست آورید، تابع تبدیل کل سیستم h[n] داده شده است.





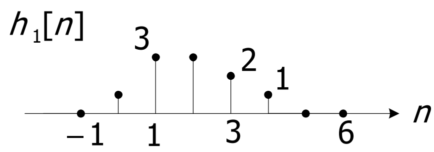
$$h_2[n]=\delta[n]+\delta[n-1] \quad , \quad h[n]=h_1[n]*(h_2[n]*h_2[n])$$

$$h_2[n]*h_2[n]=(\delta[n]+\delta[n-1])*(h_2[n])=h_2[n]+h_2[n-1]$$
$$=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-1]+\delta[n-2]=\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

$$\Rightarrow h[n]=h_1[n]+2h_1[n-1]+h_1[n-2]$$

اولین جایی که h[n] مقدار دارد $n=0$ است پس در نمودارهای بالا به ازای $n=0$ داریم:

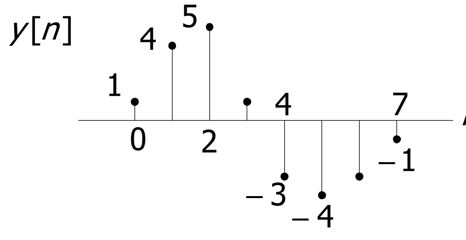
$$a_0+2a_{-1}+a_{-2}=1 \quad\Rightarrow\quad a_0=1$$
$$a_1+2a_0=5 \quad\Rightarrow\quad a_1=3$$
$$a_2+2a_1+a_0=10 \quad\Rightarrow\quad a_2=3$$
$$a_3+2a_2+a_1=11 \quad\Rightarrow\quad a_3=2$$
$$a_4+2a_3+a_2+8 \quad\Rightarrow\quad a_4=1$$
$$a_5+2a_4+a_3=4 \quad\Rightarrow\quad a_5=0$$
$$a_6+2a_5+a_4+1 \quad\Rightarrow\quad a_6=0\ldots$$



ب) اگر x[n] برابر باشد با $x[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$ مطلوب است مقدار خروجي y[n] ؟

این قسمت کاملا مستقل از قسمت قبل است چون x[n] داده شده است.

$$y[n]=h[n]*x[n]=h[n]-h[n-1]$$



۲-۴- کانولوشن (زمان پیوسته)

۲-۴-۱- روش ترسیمي

توصيه مي‌شود اگر f(t) به لحاظ رياضي ساده‌تر است از فرمول ۲ و اگر g(t) ساده‌تر است از فرمول ۱ استفاده مي‌كنيم.
در اين مثال از فرمول ۲ استفاده مي كنيم.

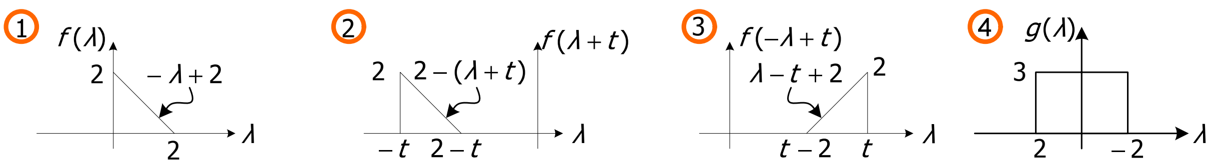
$$y(t) = f(t) * g(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, g(t-\lambda)\, d\lambda}_{1} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, f(t-\lambda)\, d\lambda}_{2}$$

$f(\lambda)$, $g(\lambda)$ را مي‌سازيم.

براي ساخت $f(t-\lambda)$ اول بايد $f(t+\lambda)$ را ساخت چون نمي‌دانيم كه t مثبت است يا منفي است پس به صورت قراردادي t واحد به سمت چپ شيفت مي‌دهيم. سپس $f(t-\lambda)$ را مي‌سازيم از اين مرحله به بعد بايد در هر مرحله معادله خط كنار نمودار نوشته شود.

حال $g(\lambda)$ را ثابت نگه داشته و $f(t-\lambda)$ را از $-\infty$ به سمت $+\infty$ شيفت مي‌دهيم. بديهي است در جايي كه دو تابع همپوشاني نداشته باشند حاصلضرب صفر است. سپس به نقطه اي مي‌رسد كه max همپوشاني را دارد و بعد دوباره به جايي مي‌رسد كه هيچ همپوشاني نداشته باشند:

مثال ۵)



$$
\begin{cases}
t < -2 \quad , & * = 0 \\
-2 \le t < 0 \quad , & * = \int_{-2}^{t} (\lambda - t + 2)(3)\, d\lambda = \frac{3}{4}(4 - t^2) \\
0 \le t < 2 \quad , & * = \int_{t-2}^{t} (\lambda - t + 2)(3)\, d\lambda = 6 \\
2 \le t \le 4 \quad , & * = \int_{t-2}^{2} (\lambda - t + 2)(3)\, d\lambda = \frac{3}{2}(t^2 - 8t + 16) \\
t \ge 4 \quad , & * = 0
\end{cases}
$$

۲-۴-۲- استفاده از فرمول

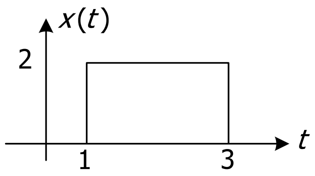
اگر با استفاده از فرمول بخواهیم کانولوشن دو سیگنال را بدست بیاوریم. باید معادله دو سیگنال بر حسب توابع ریاضي داده شده باشند یا اینکه بتوان آنها را بر حسب توابع ویژه فرموله نمود.

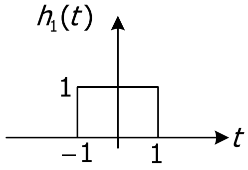
براي مثال قبل f(t) , g(t) را باید به فرم زیر نوشت و سپس در فرمول کانولوشن جایگذاري کرد:

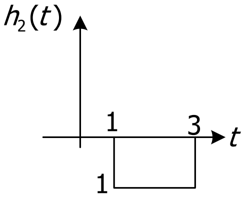
$$f(t) = 2u(t) - r(t) + r(t-2) \qquad , \qquad g(t) = 3(u(t+2) - u(t-2))$$

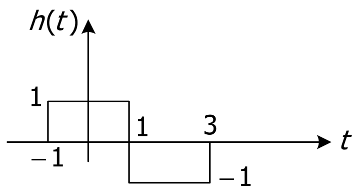
مثال ۱)

$$x(t) = 2u(t-1) - 2u(t-3) \quad , \quad h(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$$



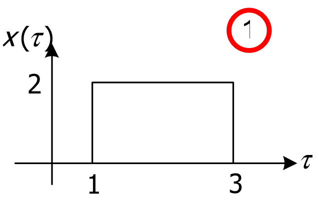


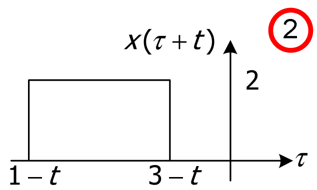


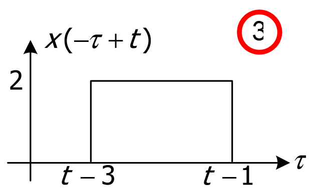


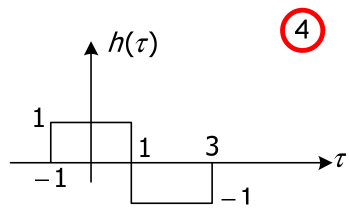
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

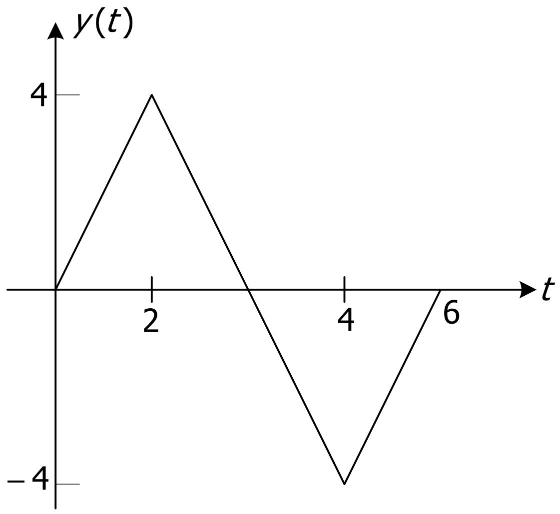






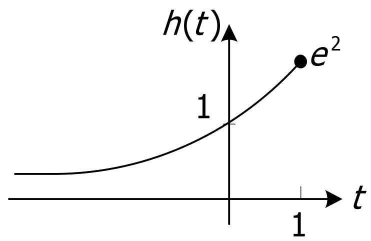


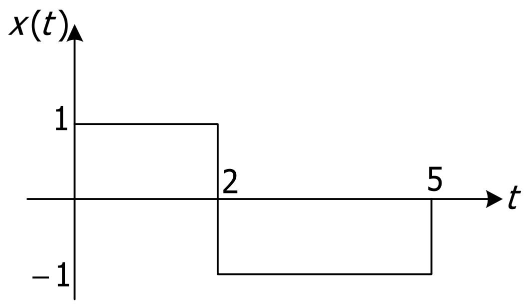
$$\begin{cases} t-1<1 & , \quad * = 0 \\ -1 \le t-1 < 1 & , \quad * = \int_{-1}^{t-1} 2d\tau = 2t \\ 1 \le t-1 < 2 & , \quad * = \int_{t-3}^{1} 2d\tau + \int_{1}^{t-1} -2d\tau = 12-4t \\ 2 \le t-1 < 3 & , \quad * = \int_{t-3}^{1} 2d\tau + \int_{1}^{t-1} -2d\tau = 12-4t \\ 3 \le t-1 < 4 & , \quad * = \int_{t-3}^{3} -2d\tau = -2(6-t) \\ t-1 \ge 5 & , \quad * = 0 \end{cases}$$



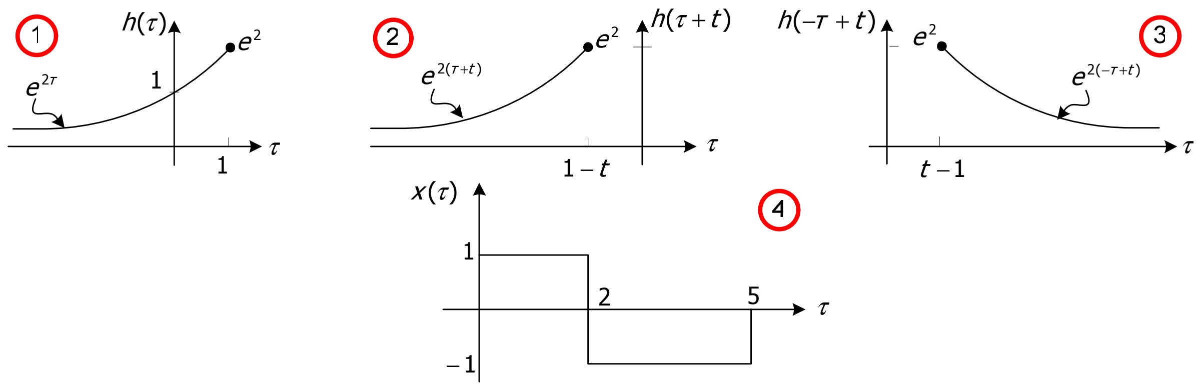
تذکر: وقتي دو تابع پالسي باهم كانوالو ميشوند حاصل يك تابع ذوزنقه ميشود و اگر اين دو تابع پالسي هم عرض باشد شكل حاصل يك تابع مثلثي خواهد بود.

مثال ۲) $h(t) = e^{2t}u(1-t) \quad , \quad x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$



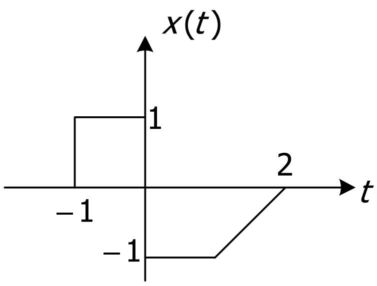


$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



$$\begin{cases} t-1>5 \quad , \quad *=0 \\ 2<t-1\le 5 \quad , \quad *=\int_{t-1}^{5} e^{2(-\tau+t)}\times(-1)d\tau=\frac{1}{2}e^{2(t-5)}-e^{2} \\ 0<t-1\le 2 \quad , \quad *=\int_{t-1}^{2} e^{2(-\tau+t)}d\tau+\int_{2}^{5} e^{2(-\tau+t)}d\tau=\frac{1}{2}(e^{2}-e^{2(t-2)}+e^{2(t-5)}-e^{2(t-2)}) \\ t-1\le 0 \quad , \quad *=\int_{0}^{2} e^{2(-\tau+t)}d\tau+\int_{2}^{5}-e^{2(-\tau+t)}d\tau=\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{2(t-2)}+e^{2(t-5)}-e^{2(t-2)}) \end{cases}$$

تمرين: سيستم LTI با پاسخ ضربه h(t) داده شده. پاسخ سيستم به ورودي x(t) را بدست آوريد و مقدار خروجي را در لحظات $t=-\frac{1}{4}$, $t=\frac{3}{4}$, $t=\frac{3}{2}$, $t=+\infty$ محاسبه كنيد.



$$h(t)=e^{-t}\delta(t)+u(t) \quad , \quad y(t)=x(t)*h(t) \quad ?$$

٢-٥- كانولوشن زمان گسسته

٢-٥-١- روش ترسيمي

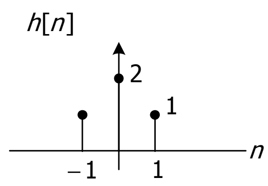
$$y[n]=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]}_{1}=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]x[n-k]}_{2}$$

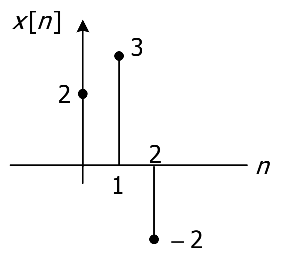
پس از تصميمگيري راجع به اينكه از رابطه ١ يا رابطه ٢ خروجي y[n] را حساب كنيم، مراحل انجام عمليات عينا شبيه زمان پيوسته است.

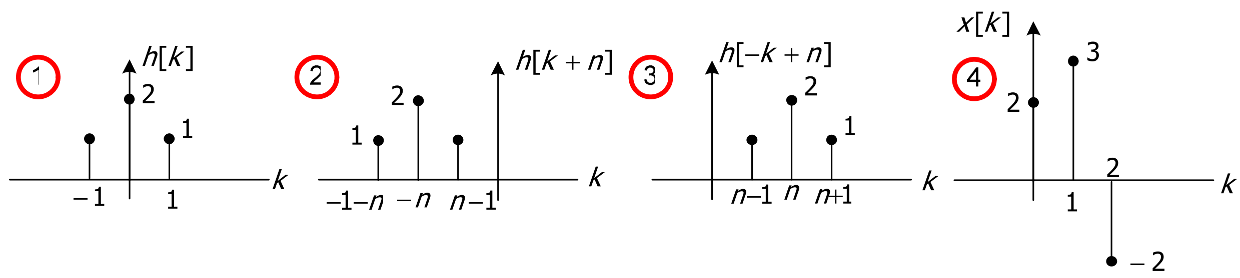
روش ترسيمي را براي تعيين خروجي سيستم زمان گسسته مطرح ميكنيم:

مثال ٣)

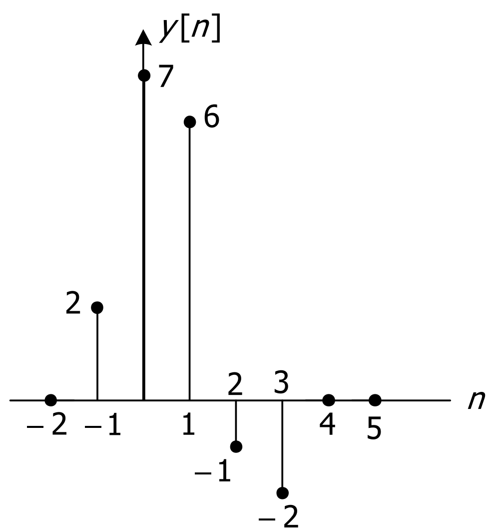
$$h[n]=\begin{cases}1 & n=\pm 1\\ 2 & n=0\\ 0 & o.w\end{cases} \qquad x[n]=\begin{cases}2 & n=0\\ 3 & n=1\\ -2 & n=2\end{cases}$$







$$\begin{cases} n+1<0 & , \quad * = 0 \\ n+1=0 & , \quad * = 1\times 2 = 2 \\ n+1=1 & , \quad * = 2\times 2 + 1\times 3 = 7 \\ n+1=2 & , \quad * = 1\times 2 + 2\times 3 - 2\times 1 = 6 \\ n+1=3 & , \quad * = 1\times 3 + 2\times(-2) = -1 \\ n+1=4 & , \quad * = 1\times(-2) = -2 \\ n+1\geq 5 & , \quad * = 0 \end{cases}$$

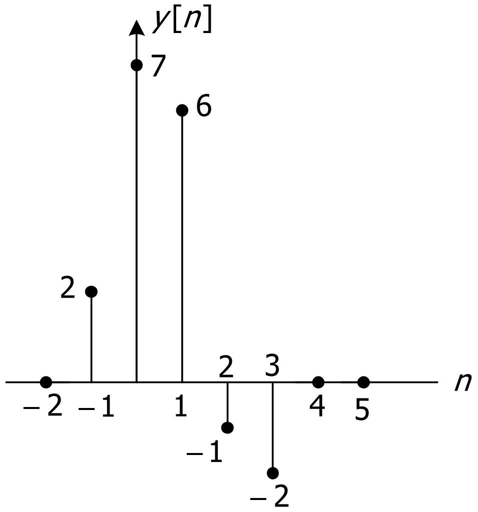


۲-۵-۲- استفاده از فرمول

ابتدا بايد توابع را بر حسب توابع ويژه و يا توابع رياضي بيان كرد. اگر ورودي و يا پاسخ ضربه بر حسب تابع ضربه بيان شده باشند، بدليل خاصيت تابع ضربه محاسبه كانولوشن بسيار راحت خواهد بود.

مثال ٤)

$$h[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1] \qquad , \qquad x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$



$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= (2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]) * h[n] \\ &= 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2] \end{aligned}$$

یا

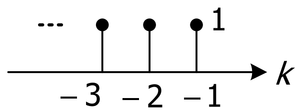
$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= x[n] * (\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]) \\ &= x[n+1] + 2x[n] + x[n-1] \end{aligned}$$

بديهي است پاسخ محاسبه شده در هر دو حالت يكسان خواهد بود:

مثال ۵) $x[n] = (\frac{1}{3})^{-n}\, u[-n-1] \quad , \quad h[n] = u[n-1]$

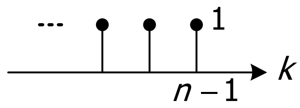
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{3})^{-k}\, u[-k-1] \cdot u[n-k-1]$$

$$u[-K-1] = \begin{cases} 1 & ; \quad k \le -1 \\ 0 & ; \quad k > 1 \end{cases}$$



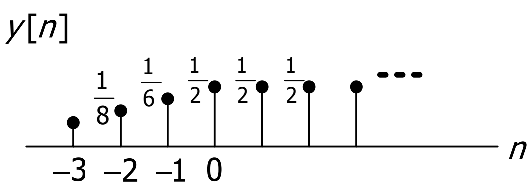
$\Rightarrow$

$$u[n-K-1] = \begin{cases} 0 & ; \quad k \le n-1 \\ 1 & ; \quad k > n-1 \end{cases}$$



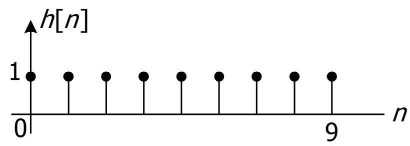
$$n-1 < -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} (\frac{1}{3})^{-k} \overset{k \to -k}{=} \sum_{k=-n+1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{k} = (\frac{1}{3})^{-n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(\frac{1}{3})^{-n+1} = \frac{3}{2}(3)^{n-1} = \frac{1}{2}(3)^{n}$$

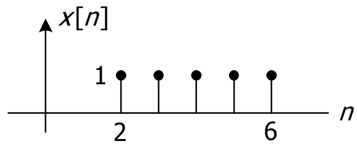
$$n-1 \ge -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} (\frac{1}{3})^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^{k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

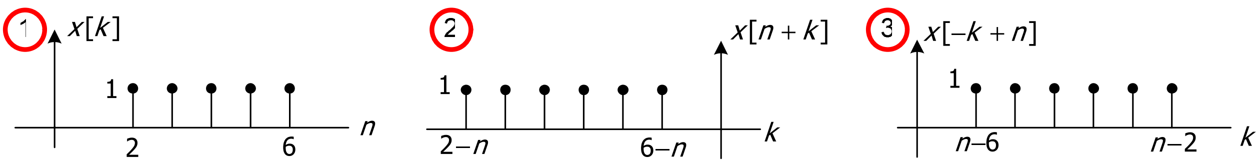


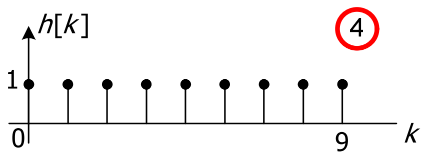
مثال٦) $x[n] = a^n\,u[n] \quad 0 < a < 1 \quad , \quad h[n] = u[n] \quad , \quad y[n] = ?$

مثال ٧) $h[n] = u[n] - u[n-10] \quad , \quad x[n] = u[n-2] - u[n-7]$









$n-2<0\,,\quad *=0$

$n-2=0\,,\quad *=1$

$n-2=2\,,\quad *=2$

$n-2=3\,,\quad *=4$

$$\begin{cases} n-2=4\,, & *=5 \\ \vdots & \\ n-2=9, & *=5 \end{cases}$$

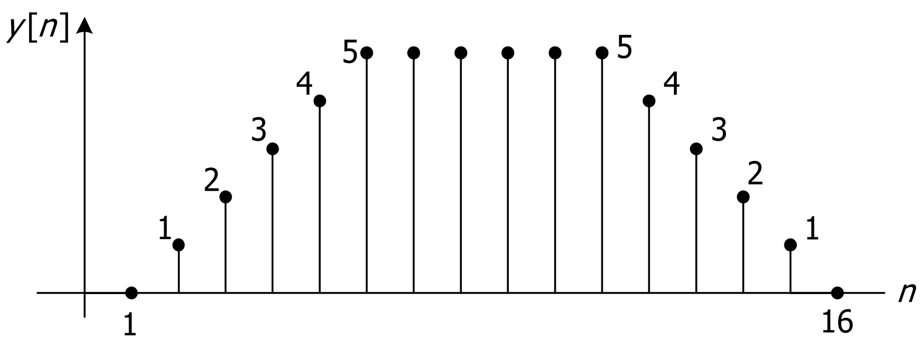
$n-2=10,\quad *=4$

$n-2=11,\quad *=3$

$n-2=12,\quad *=2$

$n-2=13,\quad *=1$

$n-2\geq 14,\quad *=0$



٢-٦- سيستم‌هاي LTI توصيف شده با معادلات ديفرانسيل(زمان پيوسته)

به طور كلي معادله ديفرانسيل يك سيستم به فرم روبه‌رو نوشته مي‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow y(t)$$

براي حل معادله ديفرانسيل بايد

١) معادله همگن حل شود.

٢)جواب خصوصي به ازاي ورودي خاص تعيين گردد.

٣) جواب كلي سيستم عبارت است از پاسخ عمومي + پاسخ خصوصي و با توجه با اين كه پاسخ عمومي داراي تعدادي ضرايب ثابت است اين ضرايب از روي شرايط سكون يا شرايط اوليه به دست مي‌آيند.

١) $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d^k t} = 0 \Rightarrow y_h(t) = \ldots$

٢) $y_p(t) = \ldots$

٣) $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

تذكر: براي بكارگيري شرايط سكون جهت تعيين پاسخ سيستم LTI به ورودي داده شده، عنوان علي بودن سيستم ضروري است. در غيراينصورت بايستي شرايط اوليه داده شده باشد.

مثال ٨)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = t \quad , \quad t > 0 \, , \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

حل:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$
$$\Rightarrow y_h(t) = K_1 e^{-t} + K_2 \, t \, e^{-t}$$

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t \quad , \quad t \geq 0 \Rightarrow y_p(t) = At^2 + Bt + c \Rightarrow y_p(t) = (t-2)$$

$$\begin{cases} y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 \, t \, e^{-t} + (t-2) \quad , \quad t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = (2+t) e^{-t} + (t-2) \, , \, t > 0$$

مثال ۹) معادله ديفرانسيل سيستم LTI و علي داده شده است. مطلوبست پاسخ سيستم به ازاي ورودي داده شده:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = \begin{cases} 0; & t \le -1 \\ 1; & t > -1 \end{cases}$$

حل:

۱) $y'(t) + 2y(t) = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \quad , \quad y_h(t) = K_1 e^{-2t}$

۲) $y'(t) + 2y(t) = 1; \quad t > -1 \, , \; y_p(t) = \frac{1}{2}$

۳) اعمال شرط سكون بر اساس علي بودن سيستم

$$\begin{cases} y(t) = K_1 e^{-2t} + \frac{1}{2}; & t > -1 \\ y(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2}; \quad t > -1$$

يا

$$y(t) = (-\frac{1}{2} e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2}) u(t+1)$$

۲-۷- پاسخ به ورودي ضربه:

۲-۷-۱- استفاده از رابطه بين پاسخ ضربه و پاسخ پله در سيستم‌هاي LTI:

با يك مثال اين رابطه را بررسي مي‌كنيم.

مثال ۱۰) سيستم LTI و علي است. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = \delta(t)$

حل: $z''(t) + z'(t) - 2z(t) = u(t)$

$$z''(t) + z'(t) - 2z(t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$z_h(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{t}$$

$$z_p(t) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} z(t) = K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t} - \frac{1}{2};\ \ t > 0 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow z(t) = \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{2}\,; \quad t > 0$$

(مشتق پاسخ پله = پاسخ ضربه)

$$z(t) = (\frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{2})\,u(t)\,; \quad y(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow y(t) = (-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t})\,u(t) + (\frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{2})\,\delta(t) \Rightarrow y(t) = (-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t})\,u(t)$$

۲-۷-۲- محاسبه پاسخ ضربه سیستم بطور مستقیم

جهت محاسبه پاسخ ضربه سیستم LTI پاسخ معادله همگن را بدست آورده و آن را بعنوان پاسخ کامل سیستم در نظر ميگيريم. پاسخ کامل باید در معادله دیفرانسیل صدق کند که بدین ترتیب ضرایب ثابت محاسبه و پاسخ کامل، که همان پاسخ ضربه سیستم LTI است تعیین خواهد شد.

حال مثال ۱۰ را به این روش مجددا حل ميکنیم:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = \delta(t)$$

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$

$$y_h(t) = K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t} \;\Rightarrow y(t) = (K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})u(t)$$

$$y'(t) = (-2K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\,u(t) + (K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\delta(t)$$

$$y''(t) = \ldots = (4K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\,u(t) + (-4K_1\, e^{-2t} + 2K_2\, e^{t})\,\delta(t) + (K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\,\delta'(t)$$

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow (-3K_1\, e^{-2t} + 3K_2\, e^{t})\,\delta(t) + (K_1 + K_2)\,\delta'(t) - (-2K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\,\delta(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = -\frac{1}{3} \\ K_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y(t) = (-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t})\,u(t) = h(t)$$

۲-۸- سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات تفاضلي (زمان گسسته)

هدف از تحليل معادله تفاضلي:

۱) رابطه مستقيمي بين ورودي و خروجي به دست آوريم .

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$x[n]=\delta[n] \Rightarrow y[n]=h[n]$$

۲) خروجي را به ازاي ورودي مشخص پيدا كنيم.

۲-۸-۱- روش حل معادله تفاضلي

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k]=\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

الف) روش مستقيم:

پاسخ كامل: $y[n]=y_h[n]+y_p[n]$, پاسخ خاص: $y_p[n]$, پاسخ عمومي: $y_h[n]$

با فرض آنكه معادله تفاضلي مرتبه دوم است N=2 ، براي بدست آوردن جواب عمومي مراحل زير را انجام مي‌دهيم:

$$a_0\, y[n]+a_1 y[n-1]+a_2\, y[n-2]=0$$

$$y_h[n]=K\, r^n \Rightarrow (a_0+a_1 r^{-1}+a_2 r^{-2})\cdot k r^n=0$$

$$y_h[n]=k_1(r_1)^n+k_2(r_2)^n \qquad \text{حقيقي و متمايز} \qquad r_1\,,\,r_2$$

$$y_h[n]=k_1(r_1)^n+k_2 n\,(r_2)^n \qquad r_1=r_2$$

مثال ۱) مطلوب است خروجي اگر $x[n]=n^2$ و $y[0]=1$ باشد.

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]-x[n-1]$$

پاسخ عمومي:

$$y[n]+2y[n-1]=0 \Rightarrow y_h[n]=k\,r^n \Rightarrow k\,r^n+2k\,r^{n-1}=0$$

$$k\,r^n(1+2\,r^{-1})=0 \Rightarrow r=(-2) \Rightarrow y_h[n]=k(-2)^n$$

پاسخ خصوصي:

$$\mathrm{y[n]+2y[n-1]=n^2}-(n-1)^2=2n-1$$

$$y_p[n]=An+B \Rightarrow An+B+2(A(n-1)+B)=2n-1 \Rightarrow \begin{cases}3A=2\\ -2A+3B=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=\dfrac{2}{3}\\ B=\dfrac{1}{9}\end{cases}$$

جواب خصوصي $\Rightarrow y_p[n]=\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$

پاسخ كامل:

$$\begin{cases}y[n]=k(-2)^n+\dfrac{2}{3}n+\dfrac{1}{9} \Rightarrow k=\dfrac{8}{9}; \quad y[n]=\dfrac{8}{9}(-2)^n+\dfrac{2}{3}n+\dfrac{1}{9}\\ y[0]=1\end{cases}$$

ب) روش بازگشتي

با يك مثال اين روش را يررسي مي‌كنيم:

مثال ۲) سيستم LTI و علي توصيف شده با معادله تفاضلي زير را در نظر بگيريد.

$$y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+x[n]$$

مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه h[n]

ب) پاسخ ضربه معكوس $h_I[n]$

ج) به ازاي ورودي داده شده $x[n]=\delta[n-1]$ خروجي را بدست آوريد.

الف) $h[n]=y[n]\big|_{x[n]=\delta[n]}$

$$\Rightarrow h[n]=\frac{1}{4}h[n-1]+\delta[n]$$

روش بازگشتي:

$$h[0]=\frac{1}{4}h[-1]+1=1$$

$$h[1]=\frac{1}{4}h[0]=\frac{1}{4}(1)$$

$$h[2]=\frac{1}{4}h[1]=\frac{1}{4}(1)^2$$

$$\vdots$$

$$h[n]=\frac{1}{4}h[n-1]=(\frac{1}{4})^n \Rightarrow h[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$$

ب) براي بدست آوردن $h_I[n]$ بايد فرمول زير برقرار باشد:

$$h[n]*h_I[n]=\delta[n]\Rightarrow\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\,h_I[n-k]=\delta[n]$$

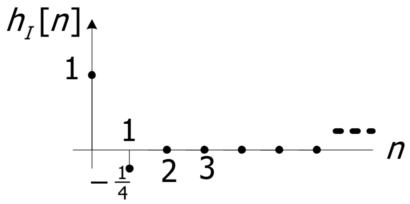
$$\Rightarrow\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{4})^k\;u[k]\,h_I[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^k\;h_I[n-k]=\delta[n]$$

سؤال: اگر سيستمي LTI و علي باشد آيا معكوس سيستم نيز LTI و علي خواهد بود؟

$$h_I[n]+\frac{1}{4}h_I[n-1]+(\frac{1}{4})^2h_I[n-2]+(\frac{1}{4})^3h_I[n-3]+\cdots=\delta[n]$$

روش بازگشتي:

$$h_I[0]=1$$
$$h_I[1]+\frac{1}{4}h_I[0]=0\Rightarrow h_I[1]=-\frac{1}{4}$$
$$h_I[2]+\frac{1}{4}h_I[1]+(\frac{1}{4})^2h_I[0]=0\Rightarrow h_I[2]=0$$
$$h_I[3]=0\quad,\cdots\Rightarrow h_I[n]=\delta[n]-\frac{1}{4}\delta[n-1]$$



ج) پاسخ ضربه سيستم h[n] در قسمت الف بدست آورده شد، با توجه به خاصيت TI (نامتغيربازمان) بودن سيستم داريم:

$$x[n]=\delta[n]\Rightarrow h[n]=(\frac{1}{4})^n\;u[n]$$

$$x[n]=\delta[n-1]\Rightarrow y[n]=h[n-1]=(\frac{1}{4})^{n-1}\;u[n-1]$$

مثال ۳) سيستم LTI با معادله تفاضلي $y[n]+2y[n-1]=x[n]$ توصيف شده است. با فرض سكون اوليه (علي) پاسخ ضربه را به دست آوريد.

تذكر: اگر ورودي ضربه واحد بود پيشنهاد مي‌شود از روش بازگشتي معادله را حل كنيد.

روش اول: بكارگيري روابط بازگشتي و تعيين پاسخ به ازاء ورودي خاص با توجه به شرط سكون اوليه

$$x[n]=\delta[n]\Rightarrow y[n]=h[n]$$

$$h[n]+2h[n-1]=\delta[n]\Rightarrow h[n]=-2h[n-1]+\delta[n]$$
$$h[0]=-2h[-1]+1=1$$
$$h[1]=-2h[0]=-2$$
$$h[2]=-2h[1]=(-2)^2$$
$$h[3]=(-2)^3$$
$$\vdots$$

$$h[k]=(-2)^k \Rightarrow h[n]=(-2)^n u[n]$$

روش دوم: بدست آوردن خروجي بر حسب ورودي بطور كلي با استفاده از روابط بازگشتي.

$$\begin{aligned}
&y[n]+2y[n-1]=x[n]\\
&y[0]+2y[-1]=x[0]\\
&y[1]+2y[0]=x[1]\\
&y[2]+2y[1]=x[2]\\
&\vdots\\
&y[n-2]+2y[n-3]=x[n-2]\\
&y[n-1]+2y[n-2]=x[n-1]\\
&y[n]+2y[n-1]=x[n]
\end{aligned}$$

براي بدست آوردن رابطه صريح خروجي بر حسب ورودي (FIR) به طريق ذيل عمل مي كنيم:

$$\begin{aligned}
&(-2)^n(y[0]+2y[-1]=x[0])\\
&(-2)^{n-1}(y[1]+2y[0]=x[1])\\
&(-2)^{n-2}(y[2]+2y[1]=x[2])\\
&\vdots\\
&(-2)^2(y[n-2]+2y[n-3]=x[n-2])\\
&(-2)^1(y[n-1]+2y[n-2]=x[n-1])\\
&(-2)^0(y[n]+2y[n-1]=x[n])\\
&\overline{\sum\qquad\qquad}\Rightarrow y[n]=(-2)^0x[n]+(-2)^1x[n-1]+(-2)^2x[n-2]+\cdots+(-2)^nx[0]\\
&\qquad\qquad=\sum_{k=0}^{n}(-2)^k x[n-k]=\sum_{k=0}^{n}(-2)^{n-k}x[k]\\
&\Rightarrow h[n]=\sum_{k=0}^{n}(-2)^{n-k}\delta[k]=(-2)^n\sum_{k=0}^{n}\delta[k]=(-2)^n u[n]
\end{aligned}$$

روش سوم: استفاده از رابطه بين پاسخ ضربه و پاسخ پله در سيستم‌هاي LTI

پاسخ پله:

$$z[n]+2z[n-1]=u[n]$$

پاسخ همگن:

$$\begin{aligned}
&z[n]+2z[n-1]=0\\
&z_h[n]=k(r)^n \Rightarrow k\,r^n(1+2\,r^{-1})=0 \Rightarrow r=-2 \Rightarrow z_h[n]=k(-2)^n
\end{aligned}$$

پاسخ حصوصي:

$$z[n]+2z[n-1]=1\ ,\ n\ge 0 \quad \Rightarrow z_p[n]=A \Rightarrow A+2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

پاسخ كامل:

$$z[n]=k(r)^n+\frac{1}{3}\ ,\ n\ge 0 \Rightarrow z[-1]=k(-2)^{-1}+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow z[n]=(\frac{2}{3})(-2)^n+\frac{1}{3}\ ,\ n\ge 0 \Rightarrow z[n]=[(\frac{2}{3})(-2)^n+\frac{1}{3}]u[n]$$

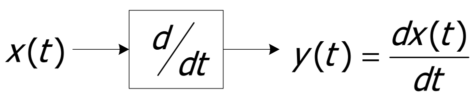
محاسبه پاسخ ضربه با استفاده از پاسخ پله:

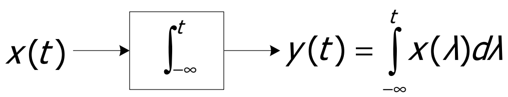
$$\Rightarrow h[n]=z[n]-z[n-1]=(\frac{2}{3})(-2)^n\ u[n]+\frac{1}{3}u[n]-\frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n-1]-\frac{1}{3}u[n-1]$$

$$\Rightarrow (\frac{2}{3})(-2)^n\ u[n]-\frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n]=(\frac{2}{3})(-2)^n[\frac{1}{2}+1]u[n]=(-2)^n\ u[n]$$

۲-۹- نمایش سیستم LTI با استفاده از بلوك دیاگرام (مشتق‌گیر و انتگرال‌گیر)

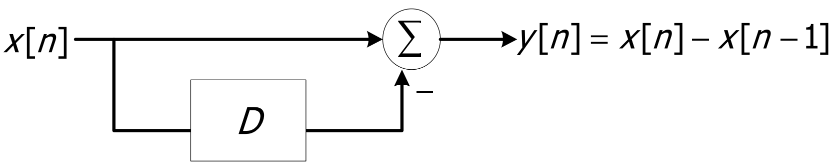
زمان پیوسته



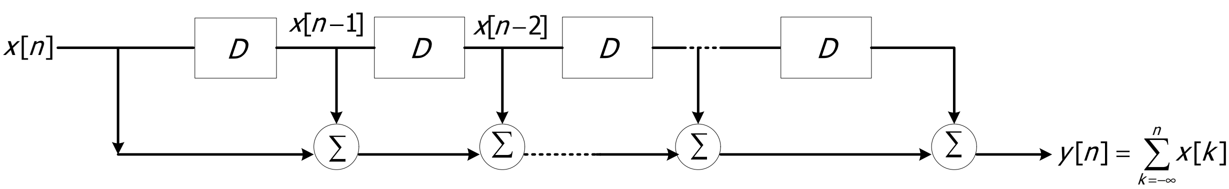


زمان گسسته

هم ارز با مشتق در پیوسته :



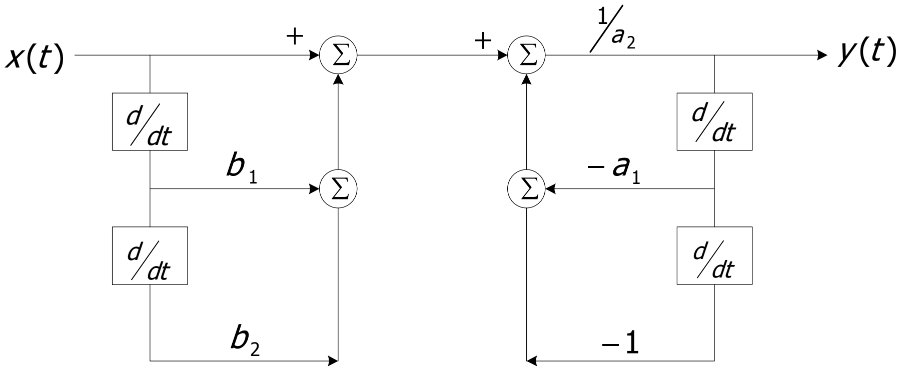
هم ارز با انتگرال در پیوسته :



مثال ٤)
$$y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=x(t)+b_1x'(t)+b_2x''(t)$$

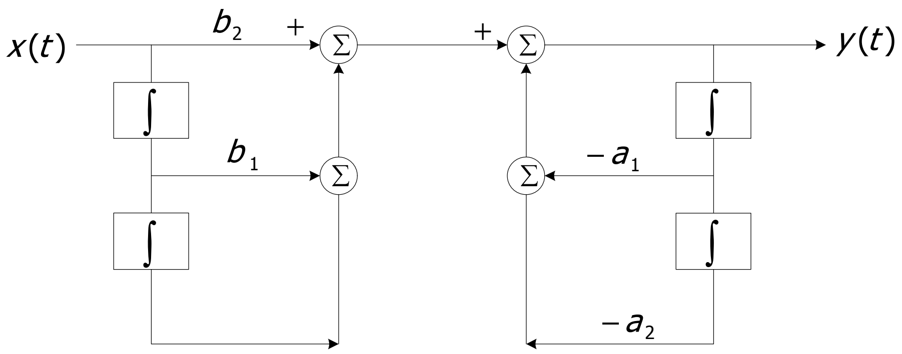
الف) نمایش سیستم با استفاده از بلوك‌هاي مشتق‌گير

$$y(t)=-\frac{a_1}{a_2}y'(t)-\frac{1}{a_2}y''(t)+\frac{1}{a_2}x(t)+\frac{b_1}{a_2}x'(t)+\frac{b_2}{a_2}x''(t)$$



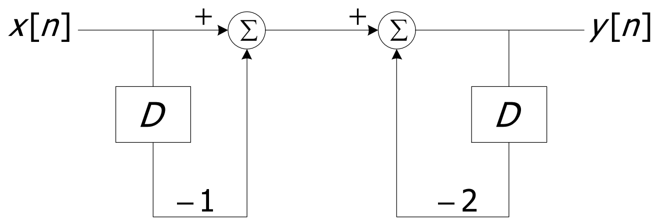
ب) نمایش سیستم با استفاده از بلوك‌هاي انتگرال‌گير

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=x(t)+b_1x'(t)+b_2x''(t)$$
$$\Rightarrow y''(t)=-a_1y'(t)-a_2y(t)=x(t)+b_1x'(t)+b_2x''(t)$$
$$y(t)=-a_1\int y(t)dt-a_2\int\int y(t)dt+\int\int x(t)dt+b_1\int x(t)dt+b_2x(t)$$



مثال ٥)
$$y[n]+2y[n-1]=x[n]-x[n-1]$$

$$y[n]=x[n]-x[n-1]-2y[n-1]$$



تمرين: رسم بلوك دياگرام؟

سيستم زمان پيوسته

$$y'''(t)+3y''(t)+4y'(t)+5y(t)=x'(t)$$

سيستم زمان گسسته

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]$$

۲-۱۰- خلاصه

با توجه به رابطه كانولوشن مي‌توان خواص جابه‌جايي‌پذيري، توزيع‌پذيري و شركت‌پذيري را براي سيستم‌هاي LTI تعريف كرد.

با معرفي تابع تبديل مي‌توان خواص جديدي براي سيستم‌هاي LTI بيان كرد.

كانولوشن به دو روش ترسيمي و فرمول قابل محاسبه است.

در معادلات ديفرانسيل، با حل معادله همگن و يافتن جواب خصوصي به ازاي ورودي خاص، جواب كلي سيستم از جمع پاسخ عمومي و پاسخ خصوصي بدست مي‌آيد.

براي بكارگيري شرايط سكون جهت تعيين پاسخ سيستم LTI به ورودي داده شده، عنوان علي بودن سيستم ضروري است.

با استفاده از رابطه بين پاسخ ضربه و پاسخ پله در سيستم‌هاي LTI و يا محاسبه پاسخ ضربه سيستم به طور مستقيم مي‌توان پاسخ به ورودي ضربه را يافت.

سيستم‌هاي LTI را با استفاده از بلوك دياگرام نيز مي‌توان نشان داد.