
بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات مهندسی

گروه ریاضی
دانشکده فنی و حرفه ای شهید چمران کرمان

سری فوریه

اتحاد پارسوال

اتحاد پارسوال : هرگاه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $2T$ باشد آنگاه داریم:

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} f^{2}(x)dx = \frac{a_{0}^{2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

که در آن a_n و b_nها با ضرایب بسط f به صورت سری فوریه می‌باشند.

مثال با استفاده از سری فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

مقدار زیر را بیابید.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

حل مثال قبل

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\sin nx|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n\pi}\sin nx|_{0}^{\pi} = 0, n \neq 0, a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{n\pi}\cos nx|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\cos nx|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n] - \frac{1}{n\pi}[(-1)^n - 1] = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = -\frac{x}{\pi}|_{-\pi}^{0} + \frac{x}{\pi}|_{0}^{\pi} = -1+1=0$$

ادامه حل مثال

بنابراین سری فوریه تابع f بشکل زیر می باشد

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1-(-1)^n]\sin nx=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k-1}\sin(2k-1)x$$
$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\Rightarrow f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

اکنون بنا به اتحاد پارسوال داریم

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1dx=2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(2k-1)^2}$$
$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

مثال

مثال : اگر بسط سری فوریه کسینوسی $0 \le x \le \pi$ و $f(x)=\sin x$ به صورت زیر باشد،

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\right)\cos nx$$

آن‌گاه مقدار سری $\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{5^2.7^2}+\cdots$ برابر است با:

حل

در جلسه قبل سری فوریه تابع $f(x) = sinx$ را بدست آوردیم بنابراین

$$L=\pi \qquad \frac{a_0}{2}=\frac{2}{\pi} \qquad b_n=0$$

$$a_n=\frac{-2}{\pi}\,\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}=\begin{cases}0 & \text{اگر n فردباشد} \\ \dfrac{-2}{\pi}\,\dfrac{2}{n^2-1} & \text{اگر n زوج باشد}\end{cases}$$

لذا طبق تساوی پارسوال می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2 x dx=\frac{\left(+\frac{4}{\pi}\right)^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{(2k)^2-1}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}\Rightarrow \frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{5^2.7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)=\frac{\pi^2-8}{16}$$

مثال

مثال با استفاده از اتحاد پارسوال نشان دهید : $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$

حل : برای محاسبه سری فوق اول تابع $f(x)$ را با دوره تناوب اصلی ۴ با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم :

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 2 \\ 4-x & 2\le x\le 4 \end{cases}$$

با توجه به تعریف داریم : $2T=4 \Rightarrow T=2$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 x\,dx+\int_2^4 (4-x)dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2+\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^4\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2}(2+16-8-8+2)=2$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_2^4 (4-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2\right) + \left(\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} - \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_2^4\right)$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2} + \frac{-4}{n^2\pi^2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi\right)$$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \quad \Rightarrow \quad a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{-8}{\pi^2(2k+1)^2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

ادامه حل

$$b_n = \frac{۱}{۲}\left(\int_{۰}^{۲} \sin\frac{n\pi x}{۲}dx + \int_{۲}^{٤}(٤-x)\sin\frac{n\pi x}{۲}dx\right)$$

$$b_n = \frac{۱}{۲}\left(\frac{-۲x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{۲} + \frac{٤}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi x}{۲}\Big|_{۰}^{۲}\right) + \left(\frac{-۸}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{۲} + \frac{۲x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{۲} - \frac{٤}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi x}{۲}\Big|_{۲}^{٤}\right)$$

$$b_n = \frac{۱}{۲}\left(\frac{-٤}{n\pi}\cos n\pi - \frac{۸}{n\pi} + \frac{۸}{n\pi} + \frac{۸}{n\pi}\cos n\pi - \frac{٤}{n\pi}\cos n\pi\right) = ۰$$

پس:

$$f(x) = ۱ - \frac{۸}{\pi^۲}\left(\cos\frac{\pi x}{۲} + \frac{۱}{۳^۲}\cos\frac{۳\pi x}{۲} + \frac{۱}{٥^۲}\cos\frac{٥\pi x}{۲} + \cdots\right)$$

ادامه حل

$$\int_{۰}^{۴} f(x)^{۲}dx = ۲ + \frac{۶۴}{\pi^{۴}}\left(\frac{۱}{۱^{۴}} + \frac{۱}{۳^{۴}} + \frac{۱}{۵^{۴}} + \cdots\right)$$

از طرف دیگر داریم

$$\int_{۰}^{۴} f(x)^{۲}dx = \int_{۰}^{۲} x^{۲}dx + \int_{۲}^{۴}(۴-x)^{۲}\,dx = \left.\frac{x^{۳}}{۳}\right|_{۰}^{۲} + \frac{-(۴-x)^{۳}}{۳} = \frac{۸}{۳} + \frac{۸}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

بنابراین

$$\frac{۸}{۳} = ۲ + \frac{۶۴}{\pi^{۲}}\left(\frac{۱}{۱^{۴}} + \frac{۱}{۳^{۴}} + \frac{۱}{۵^{۴}} + \cdots\right) \Rightarrow \frac{۱}{۱^{۴}} + \frac{۱}{۳^{۴}} + \frac{۱}{۵^{۴}} + \cdots = \left(\frac{۸}{۳} - ۲\right) \times \frac{\pi^{۴}}{۶۴} = \frac{۲\pi^{۴}}{۳\times ۶۴} = \frac{\pi^{۴}}{۹۶}$$

حال قرار می‌دهیم :

$$s = \frac{۱}{۱^{۴}} + \frac{۱}{۲^{۴}} + \frac{۱}{۳^{۴}} + \frac{۱}{۴^{۴}} + \cdots$$

$$s = \left(\frac{۱}{۱^{۴}} + \frac{۱}{۳^{۴}} + \frac{۱}{۵^{۴}} + \cdots\right) + \left(\frac{۱}{۲^{۴}} + \frac{۱}{۴^{۴}} + \frac{۱}{۶^{۴}} + \cdots\right)$$

$$s = \frac{\pi^{۴}}{۹۶} + \frac{۱}{۲^{۴}}\left(۱ + \frac{۱}{۲^{۴}} + \frac{۱}{۳^{۴}} + \cdots\right) \Rightarrow s = \frac{\pi^{۴}}{۹۶} + \frac{۱}{۱۶}s \Rightarrow s - \frac{۱}{۱۶}s = \frac{\pi^{۴}}{۹۶} \Rightarrow \frac{۱۵s}{۱۶} = \frac{\pi^{۴}}{۹۶} \Rightarrow s = \frac{۱۶\pi^{۴}}{۱۵\times ۹۶} = \frac{\pi^{۴}}{۹۰}$$

تمرین . نشان دهید تابع

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -4 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 4 \end{cases} \quad ; \quad f(x+8) = f(x)$$

دارای سری فوریه بصورت زیر است.

$$2 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{4}$$

تمرین های سری فوریه

تمرین با استفاده از سری فوریه $-\pi \le x \le \pi$,$f(x) = x^2$ مقدار

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

تمرین با استفاده از سری فوریه $-\pi \le x \le \pi$,$f(x) = x$ مقادیر

$$1)1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$2)1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

تحقیق نمایید.

تمرین . به کمک سری فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

و تساوی پارسوال، درستی تساوی زیر تحقیق نمایید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

پایان جلسه سوم