
بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات مهندسی

گروه ریاضی
دانشکده فنی و حرفه ای شهید چمران کرمان

سری فوریه

سری فوریه سینوسی و کسینوسی

فرض کنید تابع f (x) در (0 , L) تعریف شده باشد، اگر این تابع را در فاصله $(-L,0)$ به طور زوج گسترش داده و برای تابع حاصله سری فوریه بنویسیم، به این سری فوریه، سری فوریه کسینوسی گفته می‌شود. البته بدیهی است که در چنین وضعیتی $b_n = 0$ است.

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x).dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx}$$

همچنین اگر این تابع را در فاصلهٔ $(-L,0)$ به طور فرد گسترش داده و برای تابع حاصله سری فوریه بنویسیم، به این سری فوریه، سری فوریه سینوسی گفته می‌شود. البته بدیهی است ضرایب a_n و a_0 مساوی با صفر است.

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx}$$

مثال گسترش کسینوسی و گسترش سینوسی (یا بطور ساده تر، سری فوریه کسینوسی و سری فوریه سینوسی) تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

سری کسینوسی:

$$b_n = 0,$$
$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos(\frac{n\pi}{2}x)dx = \int_0^1 0\cos(\frac{n\pi}{2}x) + \int_1^2 1\cos(\frac{n\pi}{2}x)dx$$
$$= [\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x]_1^2 = -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \ (n \neq 0.)$$
$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 0dx + \int_1^2 1dx = 1.$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi}{2})\cos(\frac{n\pi}{2}x)$$

سری سینوسی:

$$\begin{aligned}
&a_n = 0,\\
&b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin(\frac{n\pi}{2}x)dx = \int_0^1 0\sin(\frac{n\pi}{2}x)dx + \int_1^2 1\sin(\frac{n\pi}{2}x)dx\\
&= [-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x]_1^2 = \frac{2}{n\pi}((-1)^{n+1} + \cos\frac{n\pi}{2})
\end{aligned}$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}((-1)^{n+1} + \cos\frac{n\pi}{2})\sin(\frac{n\pi}{2}x)$$

قضیه همگرایی سری های فوریه

<u>قضیه دیریکله :</u> هرگاه تابع f در بازه $(-T\,,+T)$ تعریف و کران دار باشد و در این بازه فقط در تعداد نقاط متناهی ناپیوستهٔ جهشی داشته باشد و متناوب با دورهٔ اصلی $2T$ باشد در اینصورت سری $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T}$ که در آن a_0 و a_n و b_nها از روی فرمولهای ۱ و ۲ و ۳ محاسبه می‌شوند، در نقاط پیوسته f به $f(x)$ میل می‌کند و درنقاط ناپیوسته جهشی به عبارت $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ که در آن $f(x^+)$ و $f(x^-)$ به ترتیب حد راست و چپ f در نقطه ناپیوسته جهشی می‌باشد .

مثال

مثال ابتدا سری فوریه تابع زیر را بیابید و سپس به کمک آن مقادیر

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6},\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

را تحقیق نمایید.

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leq x\leq 0\\ x, & 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

حل مثال قبل

با استفاده انتگرال گیری به روش جز به جز داریم

$$\begin{array}{ccc}
x & + & \sin n\pi x \\
1 & - & -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x \\
0 & + & -\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x \\
\cdot & & \frac{1}{n^3\pi^3}\cos n\pi x
\end{array}$$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{0} -x dx + \frac{1}{1}\int_{0}^{1} x dx = [-\frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} + [\frac{x^2}{2}]_{0}^{1} = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{0}(-x)\cos n\pi x dx + \frac{1}{1}\int_{0}^{1} x\cos(n\pi x)dx$$

$$= [(-x)(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x) - (-1)(-\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x))]_{-1}^{0}$$

$$+ [(x)(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x) - (1)(-\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x))]_{0}^{1}$$

$$= [-\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}] + [\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2}] = -\frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n), n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{0}(-x)\sin n\pi x dx + \frac{1}{1}\int_{0}^{1} x\sin(n\pi x)dx$$

$$= -[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x - \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x]_{-1}^{0} + [-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x]_{0}^{1}$$

$$= -[\frac{(-1)^n}{n\pi}] + [\frac{(-1)^n}{n\pi}] = 0$$

ادامه حل مثال

بنابراین سری فوریه تابع f بشکل زیر می باشد

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x$$

چون تابع در نقطه $x=0$ پیوسته است پس مقدار سری با مقدار تابع در این نقطه برابر است لذا داریم

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

مثال

مثال ۲-۱-۱۶. سری فوریه تابع $f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$ را بیابید و سپس به کمک آن مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}$ حساب نمایید.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -xdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi} = -\frac{1}{\pi}(0 - \frac{\pi^2}{2}) + \frac{1}{\pi}(\frac{\pi^2}{2} - 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

ادامه حل مثال

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-x) \cos nx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[(-x)(\frac{1}{n}\sin nx) - (-1)(\frac{-\cos nx}{n^2})]_{-\pi}^{0}$$

$$+ \frac{1}{\pi}[(x)(\frac{\sin nx}{n}) - (1)(-\frac{\cos nx}{n^2})]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2}] + \frac{1}{\pi}[\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}]$$

$$= \frac{2}{\pi}[\frac{-1+(-1)^n}{n^2}],\ n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[(-x)(-\frac{\cos nx}{n}) - (-1)(-\frac{\sin nx}{n^2})]_{-\pi}^{0}$$

$$+ \frac{1}{\pi}[(x)(-\frac{\cos nx}{n}) - (1)(-\frac{\sin nx}{n^2})]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}(0 - \frac{\pi(-1)^n}{n}) + \frac{1}{\pi}(\frac{\pi(-1)^n}{n}) = 0$$

ادامه حل مثال

بنابراین

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx$$

اکنون با در نظرگرفتن $x = \pi$ داریم

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} (-1)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

مثال

ابتدا سری فوریه کسینوسی $f(x) = \sin x,\ [0, \pi]$ را بیابید سپس به کمک آن مقدار

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ را بیابید.

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(1-n)x + \sin(1+n)x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[-\frac{1}{1-n}\cos(1-n)x - \frac{1}{1+n}\cos(1+n)x]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}[\frac{1}{1-n}\cos(1-n)\pi + \frac{1}{1+n}\cos(1+n)\pi - \frac{1}{1-n} - \frac{1}{1+n}]$$

$$= -\frac{1}{\pi}[\frac{(-1)^{n+1}}{1-n} + \frac{(-1)^{n+1}}{1+n} - \frac{1}{1-n} - \frac{1}{1+n}]$$

$$= -\frac{1}{\pi}[\frac{2(-1)^{n+1}}{1-n^2}] + \frac{1}{\pi}[\frac{2}{1-n^2}] = \frac{2}{\pi}[\frac{1-(-1)^{1+n}}{1-n^2}] = \frac{2}{\pi}[\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}]$$

حل مثال

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cos 2x|_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}[1-1] = 0, a_0 = \frac{4}{\pi}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\frac{4}{\pi}}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(1+(-1)^n)\cos nx}{(1-n^2)\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2}\cos 2kx$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{1-4k^2}$$

حل مثال

نقطه ی $x = \frac{\pi}{2}$ را درنظر می گیریم چون $\sin x$ در نقطه ی $\frac{\pi}{2}$ پیوسته است لذا داریم

$$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}\cos 2k\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-4k^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-4k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-4k^2} = \frac{\pi-2}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

نکته

دقت شود روابط مثلثاتی زیر برای حل انتگرال های شامل توابع مثلثاتی استفاده می شود.(مثال قبل)

$$۱)\quad \cos a \ \cos b = \frac{۱}{۲}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b) \right)$$

$$۲)\quad \sin a \ \sin b = \frac{۱}{۲}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b) \right)$$

$$۳)\quad \sin a \ \cos b = \frac{۱}{۲}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b) \right)$$

پایان جلسه دوم