
بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات مهندسی

گروه ریاضی
دانشکده فنی و حرفه ای شهید چمران کرمان

سری فوریه
جلسه اول

توابع متناوب

۱–۱)تعریف : تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را متناوب می‌نامند هرگاه $T>0$ وجود داشته باشد به قسمی که $f(x+T)=f(x)$ و T را دوره تناوب می‌نامند .

بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شود که اگر T دوره تناوب f باشد $2T,\ldots,nT\ ,\ n\in\mathbb{N}$ هم دوره تناوب می‌باشد زیرا می‌توان نوشت: $f(x)=f(x+T)=f(x+T+T)=f(x+2T)$ ، کوچکترین T را دوره تناوب اصلی می‌نامند.

به عنوان مثال $f(x)=\cos x\ ,\ f(x)=\sin x$ توابع متناوب با دوره تناوب اصلی $T=2\pi$ می-باشند .

$y=tg\,x$ تابع متناوب با دوره تناوب $T=\pi$ می‌باشد ، این تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ تعریف نشده است ، نقاط $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ نقاط انفصال تابع هستند ولی متناوب می‌باشد .

سری فوریه یک تابع متناوب

فرض کنید تابع $f : [-\ell, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T = ۲\ell$ باشد. آنگاه تابع f دارای نمایش سری فوریه بشکل زیر می باشد.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx \\
a_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots \\
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x
\end{aligned}
$$

مثال ۱) : تابع $f(x)$ با ضابطه زیر تعریف شده است بسط آن را به سری فوریه بدست آورید؟

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\le x<۵ \\ ۳ & ۵\le x<۱۰ \end{cases} \qquad ۲T=۱۰$$

$$۲T=۱۰ \Rightarrow T=۵$$

$$a_۰=\frac{۱}{۵}\int_۰^{۱۰} f(x)dx=\frac{۱}{۵}\left(\int_۰^{۵} f(x)dx+\int_۵^{۱۰} f(x)dx\right)=\frac{۱}{۵}\left(\int_۰^{۵} ۰dx+\int_۵^{۱۰} ۳dx\right)$$

$$=\frac{۱}{۵}(۰+۳x\Big|_۵^{۱۰}=\frac{۱}{۵}\big(۳(۱۰-۵)\big)=\frac{۱}{۵}(۱۵)=۳ \Rightarrow a_۰=۳$$

$n\neq ۰$

$$a_n=\frac{۱}{۵}\int_۰^{۱۰} f(x)\cos\frac{n\pi x}{۵}dx=\frac{۱}{۵}\left(\int_۰^{۵} ۰\cos\frac{n\pi x}{۵}dx+\int_۵^{۱۰} ۳\cos\frac{n\pi x}{۵}dx\right)$$

$$=\frac{۱}{۵}\left(۰+۳(\frac{۵}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{۵}\Big|_۵^{۱۰}\right)=\frac{۱۵}{۵n\pi}(\sin ۲\pi n-\sin n\pi)=۰$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_0^{10} f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{1}{5}\left(\int_0^{5} 0\sin\frac{n\pi x}{5}dx + \int_5^{10} 3\sin\frac{n\pi x}{5}dx\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(0 + \frac{-3\times 5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\Big|_5^{10}\right) = \frac{-3}{n\pi}(\cos 2n\pi - \cos n\pi) = \frac{-3}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

پس داریم

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{5} + b_n\sin\frac{n\pi x}{5} = \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\pi)}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

اما داریم

$$1-\cos n\pi = \begin{cases} 2 & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}$$

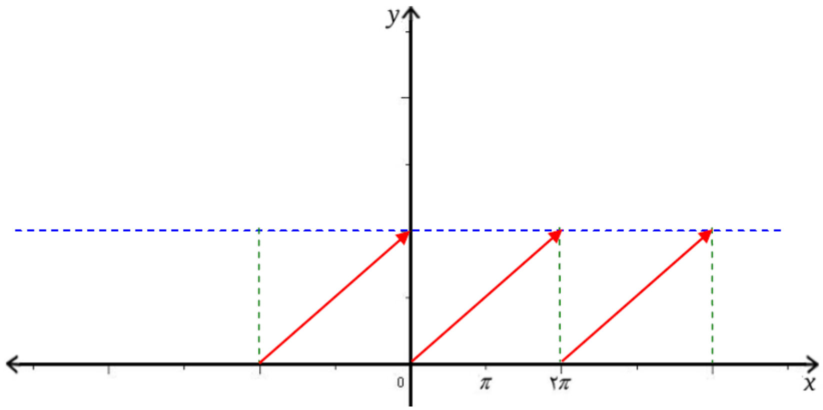
پس

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{2} - \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right)}$$

مثال بسط تابع زیر را بر حسب سری فوریه بدست آورید ؟

$f(x) = x \qquad 0 \leq x < 2\pi$

$2T = 2\pi$



مثال

حل : طبق معمول داریم :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,\cos nx\,dx \qquad \begin{cases} x = u & \Rightarrow dx = du \\ \cos nx\,dx = dv & \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin nx \end{cases}$$

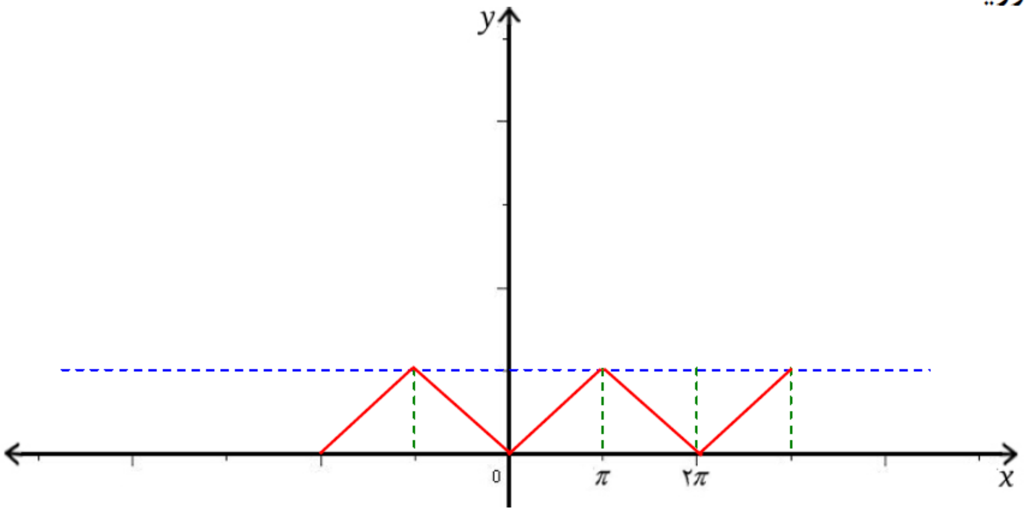
$$\pi a_n = x\,\frac{1}{n}\sin x\,\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx = 0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\,\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{n^2}(\cos 2\pi n - \cos 0) \Rightarrow \boxed{a_n = 0}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,\sin nx\,dx \qquad \begin{cases} x = u & \Rightarrow dx = du \\ \sin nx\,dx = dv & \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{cases}$$

$$\pi b_n = -x\,\frac{1}{n}\cos nx\,\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx = -\frac{2\pi}{n}\cos 2n\pi + 0 + \frac{1}{n^2}\sin nx\,\Big|_0^{2\pi} \quad \boxed{\Rightarrow b_n = -\frac{2\pi}{n}}$$

$$\boxed{f(x) = \pi + 2\sum_{n=2\pi}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}}$$

مثال بسط به سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x\le 0\\ x & 0<x\le\pi\end{cases}$ را با دوره تناوب 2π بدست آورید ؟



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-xdx+\int_{0}^{\pi}xdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}+0\right)\Rightarrow\boxed{a_0=\pi}$$

مثال

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\, dx\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(-x\frac{1}{n}\sin nx - \frac{1}{n^2}\cos nx\,\Big|_{-\pi}^{0} + x\frac{1}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\,\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{+2}{\pi n^2}(\cos nx - 1) \qquad a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{-4}{\pi(2k+1)^2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\, dx\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{-\pi} x\sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\, dx\right)$$

اما داریم :

$$\int_{0}^{-\pi} x\sin nx\, dx = -\int_{0}^{+\pi} x\sin nx\, dx$$

کافی است تغییر متغیر $x = -u$ را انتخاب کنیم

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{0}^{\pi} x\sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\, dx\right) = 0$$

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}}$$

تعریف : تابع $y=f(x)$ را یک تابع زوج می‌نامند هر گاه داشته باشیم $f(-x)=(x)$ یعنی نسبت به محور yها متقارن باشد تابع $y=f(x)$ را فرد می‌نامند هر گاه داشته باشیم $f(-x)=-f(x)$ یعنی نسبت به مبدأ متقارن باشد به عنوان مثال $y=x^{2}$ تابع زوج و $y=\sin x$ تابع فرد می‌باشد.

قضیه – الف): هر گاه $y=f(x)$ یک تابع زوج و متناوب با دوره تناوب $2T$ باشد آنگاه داریم :

$$\int_{-T}^{+T} f(x)dx = 2\int_{0}^{T} f(x)dx$$

ب) : هر گاه $y=f(x)$ یک تابع فرد و متناوب با دوره تناوب $2T$ باشد آنگاه داریم:

$$\int_{-T}^{+T} f(x)dx = 0$$

مثال

نتیجه: هر گاه f یک تابع متناوب با دوره $۲T$ و تابع زوج باشد آنگاه $f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}$ هم تابع زوج است بنابراین در بسط سری فوریه آن ضرایب a_n و b_n از فرمولهای زیر محاسبه می‌شوند :

$$\begin{cases} a_n = \frac{۲}{T}\int_{۰}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx \\ b_n = ۰ \end{cases}$$

نتیجه: هر گاه f یک تابع فرد و متناوب با دوره تناوب $۲T$ باشد آنگاه ضرایب سری فوریه آن از رابطه‌های زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} a_n = ۰ \\ b_n = \frac{۲}{T}\int_{۰}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx \end{cases}$$

مثال

مثال بسط سری فوریه f با ضابطه زیر را بدست آورید ؟

$$f(x)=x^{۲} \qquad -\pi \le x \le \pi \qquad , T=۲\pi$$

حل :

ملاحظه می‌شود $f(x)=x^{۲}$ یک تابع زوج است پس داریم :

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{T} x^{۲}\cos nx\, dx$$

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\left(x^{۲}\frac{\sin nx}{n}+۲x\frac{\cos nx}{n^{۲}}-۲\frac{\sin nx}{n^{۳}}\right)\Bigg|_{۰}^{\pi}=\frac{۲}{\pi}\left(\frac{۲\pi\cos n\pi}{n^{۲}}\right)=\frac{٤}{n^{۲}}(-۱)^{n}$$

$$a_{۰}=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{T} x^{۲}dx=\frac{۲}{\pi}\left(\frac{x^{۳}}{۳}\right)\Bigg|_{۰}^{\pi}=\frac{۲}{۳}\pi^{۲}$$

$$b_n=۰$$

پس:

$$x^{۲}=\frac{\pi^{۲}}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{٤}{n^{۲}}(-۱)^{n}\cos nx$$

پایان جلسه اول

مثال بسط سری فوریه f با ضابطه زیر را بدست آورید ؟

$$f(x)\begin{cases} 1 & \pi \le x \le 0 \\ +1 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

حل : ملاحظه می‌شود که این تابع یک تابع فرد است پس داریم :

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^T f(x)\sin nx\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^T f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\cos nx + \frac{1}{n}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{4}{\pi(2k+1)} & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$