

بسمه تعالی

باسلام و عرض تبریک سال تو خدمت شما دانشجویان محترم:

باتوجه به تعطیلی پی در پی به خاطر شیوع ویروس کرونا جزوه ای در زیر تهیه شده است که سه جلسه کلاس درس را شامل می شود.

توصیه می شود مطالب را به دقت بخوانید و تمرین های مربوطه را حل کنید.

زند

مدرس ریاضی

۱)

سید تقایی

مطلبی که در زیر ملاحظه کنید مربوط به درس ریاضی (۱) ماکه درس ۲۳۹۹
 که دوشنبه از ساعت ۳:۱۳ تا ۱۵ برگزار می شود.

در ابتدا به یادآوری چند ویژگی مهم و کاربردی در مورد اعداد حقیقی می پردازیم.
 اگر a عدس حقیقی باشد و m و n اعداد طبیعی می توانیم داشته باشیم:

۱) $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n \rightarrow 3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4} = 81$

۲) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \rightarrow 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

۳) $a^0 = 1 \rightarrow 5^0 = 1, \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$

۴) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \rightarrow 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3}$

۵) $a^n \times a^m = a^{n+m} \rightarrow 2^4 \times 2^5 = 2^9$

۶) $(a^n)^m = a^{n \times m} \rightarrow (2^3)^4 = 2^{12}$

۷) $(ab)^n = a^n b^n \rightarrow (2 \times 2)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} \times 2^{\sqrt{2}}$

۸) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$

۹) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b} \rightarrow \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \times 2}$

۱۰) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \rightarrow \frac{\sqrt[5]{44}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{44}{2}} = \sqrt[5]{22} = 2$
 $b \neq 0$

چند مثال دیگر برای بهتر فهمیدن روابط قبلی
 مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$\textcircled{1} \left(4^{-2} \times 2^{-3} \right)^{-1} \stackrel{\text{دو ضرب}}{=} \left(4^{-2} \right)^{-1} \times \left(2^{-3} \right)^{-1} \stackrel{\text{دو ضرب}}{=} 4^2 \times 2^3$$

$$= 16 \times 8 = 128$$

$$\textcircled{2} \left(4^{-2} + 2^{-3} \right)^{-1} \stackrel{\text{دو ضرب}}{=} \frac{1}{4^{-2} + 2^{-3}} \stackrel{\text{دو ضرب}}{=} \frac{1}{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{16} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{3}{16}} = \frac{16}{3}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{(-10)^3} \stackrel{\text{دو ضرب}}{=} (-10)^{\frac{3}{3}} = -10$$

دانشجویان محترم لطفاً برای بهتر فهمیدن روابط بالا تمرینهای زیر را حل کنید:

$$1) \left(5^{-2} + 3^{-3} \right)^{-1} =$$

$$2) \sqrt[4]{1000} \times \sqrt[4]{10000} =$$

$$3) \left(5^{-2} \times 3^{-3} \right)^{-1} =$$

$$4) \sqrt[4]{10000} =$$

$$5) \frac{\sqrt[4]{10^{-11}}}{\sqrt[4]{1000}} =$$

3

امثال روی چند جمله ای

تعداد انجمنی هم از قبل با اتحاد های صریح آشنا شده اید، در اینجا حجت یادآوری مجدد چند اتحاد مهم و کاربردی را ارائه می دهیم

$$1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{اتحاد مربع مجموع دو جمله ای}$$

$$2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{اتحاد مربع تفاضل دو جمله ای}$$

$$3) (a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy \quad \text{اتحاد جمله مشترک}$$

$$4) (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

$$5) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{اتحاد مکعب مجموع دو جمله ای}$$

$$6) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{اتحاد مکعب تفاضل دو جمله ای}$$

$$7) (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \quad \text{اتحاد مجموع مکعبات دو جمله ای}$$

$$8) (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad \text{اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله ای}$$

4

چند مثال در این مورد می آوریم
 مثال: حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

$$① (5x + y)(5x + y^2) \stackrel{\text{حاصل مشترک}}{=} (5x)^2 + (y + y^2)5x + y \times y^2$$

$$② (3x^2 + 4x^2)^2 \stackrel{\text{مربع لوله}}{=} (3x^2)^2 + 2(3x^2)(4x^2) + (4x^2)^2$$

$$③ \begin{pmatrix} 2n & 3n \\ 5t & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n & 3n \\ 5t & -y \end{pmatrix} \stackrel{\text{مزدوج}}{=} (5t^{2n})^2 - (y^{3n})^2$$

تمرین: دانشمندی محترم با توجه به اتحادها سلفته شده، حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) (x + 4)^2 =$$

$$۲) (x + 5)(x - 5) =$$

$$۳) (x - 4)^2 =$$

$$۴) (x + 4)(x + 5) =$$

$$۵) \begin{pmatrix} 3a^{4n} & b^{4n} \\ 3a^{4n} & -b^{4n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3a^{4n} & b^{4n} \\ 3a^{4n} & -b^{4n} \end{pmatrix} =$$

$$۶) (a + 4)^3 =$$

$$۷) (x - 2)(x^2 + 2x + 4) =$$

$$۸) (x + 4)(x^2 - 4x + 16) =$$

$$۹) (x - 3)^3 =$$

5)

تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای

مراحل تقسیم

$$\begin{array}{r} \text{مقسوم علیه} \\ \hline \text{مقسوم} \\ \hline \text{خارج قسمت} \\ \hline \text{باقیمانده} \end{array}$$

۱- ابتدا باید مقسوم و مقسوم علیه را به شکل استاندارد نوشت (یعنی توانی از صغیر به بزرگتر کاهش پیدا کند)

۲- اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم (تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای)

سپس حاصل را در خارج قسمت می‌نویسیم و این حاصل را در مقسوم علیه ضرب

می‌کنیم. سپس آنرا تراشیده کرده و در زیر مقسوم نوشته و آنرا ساده می‌کنیم

(یعنی جمع می‌کنیم)

این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که یا باقیمانده صفر برسم یا به چند جمله‌ای

که درجه آن از درجه مقسوم علیه کمتر باشد.

به یک مثال در این مورد توجه کنید.

$$\frac{3x^2 - 13x + 4}{x - 4}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{3x^2} - 13x + 4 \quad | \quad \cancel{3x} - 4 \\ - \cancel{3x^2} + 12x \\ \hline -x + 4 \\ \cancel{-x} + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

مقسوم و مقسوم علیه به شکل استاندارد است.

$$\frac{3x^2}{x} = 3x$$

$$3x(x-4) = 3x^2 - 12x$$

$$-3x^2 + 12x \leftarrow \text{قرینه}$$

$$\frac{-x}{x} = -1$$

$$-1(x-4) = -x + 4$$

6

نکته: اگر باقیمانده صفر شود گوئیم مقوم بر مقوم علیه بخش پذیر است

در تجزیه آن مقوم تقسیم هاست زیرا انجام دهید.

$$1) \frac{4x^2 + 2 + x^2 + x^3 + 2x}{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2) \frac{2a^2 - 12a + 5}{a - 5}$$

تجزیه چند جمله ای ها

تجزیه یک عبارت یعنی آن را به صورت حاصل ضرب عوامل هاست اول در آوریم

در تجزیه چند جمله ای ها از روش زیر استفاده می کنیم

۱- فاکتورگیری (با عامل مشترک گرفتن)

که هم جملات یک عبارت یک یا چند عامل مشترک دارند

۲- اتحادها: با توجه به اتحادهایی که در صحت هاست قبلی لفتیم می توانیم
چند جمله ای ها را تجزیه کنیم

به چند مثال در این مورد توجه کنید.

مثال عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$1) \quad x^2 + xy + xz + yz = (x^2 + xy) + (xz + yz)$$

$$= \overset{\text{فاکتور}}{\uparrow} x(x+y) + \overset{\text{فاکتور}}{\uparrow} z(x+y) = \underset{\text{مشترک}}{(x+y)} \underset{\text{فاکتور}}{z} (x+z)$$

8

$$x^2 + 14xy + 49y^2 - 36 = (x^2 - 14xy + 49y^2) - 36$$

انکار مربع تفاضل

$$= (x - 7y)^2 - 36 = ((x - 7y) + 6)((x - 7y) - 6)$$

انکار مزدوم

$$= (x - 7y + 6)(x - 7y - 6)$$

دانشجوی محترم با توجه به بحث تجزیه که گفته شد عبارات زیر را تجزیه کنید.
تمرین: عبارات زیر را تجزیه کنید

۱) $14x^2 + 8xy + y^2 - 14 =$

۲) $25x^2 - 14y^2 - 4y - 5x =$

۳) $x^3 + x^2y + xz^2 + yz^2 =$

امثال روی عبارات گویا

تعریف عبارات گویا: هر کسری که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد یک عبارت گویا نام دارد.

الف- جمع و تفریق عبارات گویا

اگر $\frac{A}{B}$ و $\frac{C}{D}$ دو عبارت گویا باشند از الگوهای زیر برای جمع و تفریق آنها استفاده

می‌کنیم. $B, D \neq 0$

ا) $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + CB}{BD}$

ب) $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD - CB}{BD}$

یعنی در واقع اگر مخرجها مثل هم نباشد باید مخرج مشترک بگیریم.

8

بیک مثال توکم کنید
حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$1) \frac{x+2}{x+2} + \frac{x-2}{x+3} = \frac{(x+2)(x+3) + (x-2)(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2+2x+12+x^2-4}{(x+2)(x+3)} = \frac{2x^2+2x+8}{(x+2)(x+3)}$$

$$2) \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} - \frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{x(x-y) + y(x+y) - 2xy}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{x^2-xy+yx+y^2-2xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x-y}{x+y}$$

نکته: دانشجوی محترم دقت کنید در جمع سه عبارت نیز مانند عبارت عمل من کسب فقط توکم داشته باشید که در مثال فوق مخرج کسرها در واقع یک حاصل ضرب مخرج اکبر اول می باشد، پس نیازی به نوشتن آن نمی باشد.

تمرین: حال با توکم به مطالب فوق حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$1) \frac{x+y}{xy} + \frac{x+z}{xz} + \frac{y+z}{yz} =$$

$$2) \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} + \frac{2xy}{x^2-y^2} =$$

ضرب دو عبارت گویا:

اگر $\frac{A}{B}$ و $\frac{C}{D}$ دو عبارت گویا باشند. ابتدا صورتها در هم ضرب و سپس مخرج هانیز در هم ضرب می شود مطابق با الگوی زیر $B \neq 0, D \neq 0$.

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$$

9)

دقت نمودم حاصل را در صورت امکان باید ساده کرد
به کبر مثال توجه کنید

مثال: حاصل ضرب زیر را بدست آورید.

$$\frac{x-y}{x+2y} \times \frac{x^2-4y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x-y) \times (x^2-4y^2)}{(x+2y)(x^2-y^2)} = \frac{(x-y)(x-2y)(x+2y)}{(x+2y)(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{x-2y}{x+y}$$

تقسیم عبارت گویا

برای تقسیم عبارت گویا، ابتدا کسر اول را نوشته ضربه معکوس کردیم می کنیم

نکته: معکوس یک عبارت یعنی جایی صورت و مخرج تعویض شود
 $\left(\frac{a}{b} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{b}{a} \right)$

بنابراین اگر $\frac{A}{B}$ و $\frac{C}{D}$ دو عبارت گویا باشند تقسیم آنها مطابق با الگویی زیر است
 $B \neq 0, D \neq 0$

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{A \times D}{B \times C}$$

$\frac{C}{D} \neq 0$

به کبر مثال در این مورد توجه کنید
مثال: تقسیم زیر را انجام دهید.

$$\frac{x^2-y^2}{x} \div \frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2-y^2}{x} \times \frac{x+y}{x-y} = \frac{(x^2-y^2)(x+y)}{x(x-y)}$$

$$= \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)(x+y)}{x\cancel{(x-y)}} = \frac{(x+y)^2}{x}$$

10

دانشجوی محترم: تمرین زیر را که مربوط به بحث تقسیم هستند حل کنید.
 تمرین: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$1) \frac{x+y}{x} \div \frac{x^2-y^2}{x-y} =$$

$$2) \frac{x-4y}{x+y} \times \frac{x^2-y^2}{x^2-14y^2} =$$

نکته: مزدوج عبارت $a+b$ به صورت $a-b$

و مزدوج عبارت $a-b$ به صورت $a+b$ می باشد

گویا کردن عباراتی که درخرج آنها را یکال داریم یا به طوری که گویا کردن مخرج نیاید کافی است با تقوم به اتحاد مزدوج صورت و مخرج آن کسر را در مزدوج مخرج

ضرب کنیم
 به یک مثال در این مورد تقوم کنید

در این مزدوج عبارت $\sqrt{x+4} - 2$ به صورت $\sqrt{x+4} + 2$ مخرج
 بسازیم با تقوم به این مطلب کسر زیر را گویا می کنیم.

$$\frac{x}{\sqrt{x+4} - 2} = \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2} \times \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{x(\sqrt{x+4} + 2)}{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}$$

اتحاد مزدوج

$$= \frac{x(\sqrt{x+4} + 2)}{x+4-2^2} = \frac{x(\sqrt{x+4} + 2)}{x} = \sqrt{x+4} + 2$$

11)

دانشجویان محترم، لطفاً تمرین‌های زیر را حل کنید.
تمرین: مخرج کسرهایی زیر را کوچک کنید.

$$1) \frac{x}{\sqrt{x+9} + 3}$$

$$2) \frac{y}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2(x+y)+1}}$$

انواع معادلات

معادلات درجه اول، معادلات درجه دوم و معادلات گویا

معادله درجه اول: برای حل معادله درجه اول ابتدا عملیات جبرولی را به سمت چپ و اعداد را به سمت راست تساوی می‌بریم (در حین جابجایی علامت جمله‌ها عوض می‌شود)

و بعد از ساده کردن به معادله کلی $ax = b$ می‌رسیم که $x = \frac{b}{a}$
بدست می‌آید (در واقع با تقسیم طرفین بر ضریب x جواب بدست می‌آید)

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$3x - 12 = 7x + 5 \Rightarrow 3x - 7x = 5 + 12$$

$$\Rightarrow -4x = 17$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{-17}{4}}$$

تمرین: معادله زیر را حل کنید.

$$(x+4)^2 = x^2 - 7x$$

معادلات درجه دوم

هر معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ می باشد که a, b, c اعدادی حقیقی و $a \neq 0$ است. برای حل معادلات درجه دوم چندین روش حل وجود دارد که در روش ران توضیح می دهیم

الف - روش تجزیه
در این روش به کمک اتحادها یا فاکتورگیری که قبلاً در بحث تجزیه بیان شده است عبارت درجه دوم را تجزیه می کنیم سپس از خاصیت فاکتور (یا عامل صفر) که می گوید اگر حاصل ضرب عوامل صفر شود آنگاه یا عامل اول برابر صفر است یا عامل دوم برابر با صفر استفاده می کنیم. (خاصیت فاکتور (عامل صفر))
 $ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{یا} \\ b = 0 \end{cases}$

مثال: معادله زیر را روش تجزیه حل کنید

$$x^2 - 14 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) = 0 \begin{cases} x-4=0 \rightarrow x=4 \\ \text{یا} \\ x+4=0 \rightarrow x=-4 \end{cases}$$

↑
حالت عامل صفر
اتحاد مزدوم

ب - روش دلتا (Δ) یا فرمول کلی

برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ابتدا دلتا را تشکیل می دهیم

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

حال با توجه به علامت Δ جواب ها به صورت زیر بدست می آیند

23)

$$\text{داری} \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

① اگر $\Delta > 0$ (دلتا عددی مثبت باشد)

معادله ۲ جواب متمم است

② اگر $\Delta < 0$ (دلتا عددی منفی باشد)

معادله دارای جواب حقیقی نمی باشد

$$\text{بیت} \quad x = \frac{-b}{2a}$$

③ اگر $\Delta = 0$ معادله دارای یک ریشه مضاعف متمم است

به مثالایی در این مورد توجه کنید

مثال: معادلات زیر را حل کنید

۱) $x^2 + 5x + 4 = 0$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$\Delta = 25 - 16$$

$$\Delta = 9$$

پس معادله دارای ۲ جواب متمم است

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-5 + 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-5 - 3}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

۲) $-x^2 + 3x - 7 = 0$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=-7 \end{cases}$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 3^2 - (4 \times (-1) \times (-7)) = 9 - 28 = -19$$

چون Δ عددی منفی است پس معادله دارای جواب حقیقی نمی باشد

14

تمرین : معادلات زیر را حل کنید

۱) $x^2 - 7x + 8 = 0$

۲) $3x^2 - 4x + 5 = 0$

ج - معادلات گویا

برای حل معادلات گویا ابتدا دامنه‌ی کسرها را بدست می‌آوریم

(یعنی مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم بعد از حل آن معادله، ریشه‌ها را از اعداد حقیقی حذف

می‌کنیم) سپس تمام کسرها را در کم.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) مخرج هاضب

می‌کنیم تا از حالت کسری خارج نشود و سپس بعد از ساده کردن جواب‌ها را بدست می‌آوریم.

به یک مثال در این مورد توجه کنید

مثال : مجموع جواب معادله زیر را بیابید

$$\frac{1}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x+3}$$

برای تعیین دامنه، ابتدا مخرجها را برابر با صفر قرار می‌دهیم

$$x^2 - 9 = 0 \xrightarrow{\text{روش تجزیه}} (x-3)(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x=3 \\ \text{یا} \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \end{cases}$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} - \{3, -3\}$$

یعنی تمام اعداد حقیقی به جز ۳ و -۳

15

حال چون x^2-4 هم حاصل ضرب $x-2$ و $x+2$ است پس کل کسر را در x^2-4 ضرب می کنیم. پس داریم

$$(x^2-4) \times \left[\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x+2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{\overset{(x-2)(x+2)}{x^2-4}}{x-2} = \frac{\overset{(x-2)(x+2)}{2(x^2-4)}}{x+2}$$

$$\Rightarrow 1 + x+2 = 2(x-2)$$

$$\Rightarrow x+2 = 2x-4 \xrightarrow{\text{معادله درجه اول}} x-2x = -4-2$$

$$-x = -6$$

$$x = 6$$

دانشجوی عزیز معارفاً گویای زیر را حل کنید

$$1) \frac{x+2}{x-2} + \frac{1}{x+2} = 2$$

مکزی!

$$2) \frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x-2}$$

موفق و پیروز باشید

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ